

Blandade Uppgifter Kap 3

31. $y'' - 6y = -18x^2$

Är det lämpligt att ansätta
 $y_p = ax^2$?

y_p måste vara en andragradare eftersom diff. ekv. innehåller en y -term.

När vi deriverar en andragradare två ggr får vi en konstant (här $y_p'' = 2a$). Eftersom högerledet inte innehåller en konstant måste y_p ha en konstantterm.

y_p behöver däremot inte innehålla någon x -term, eftersom diff. ekv. inte innehåller någon y' -term och högerledet ingen x -term. (Hade vi ansatt $y_p = ax^2 + bx + c$, hade vi sett att $b = 0$)

\therefore Vi bör ansätta $y_p = ax^2 + b$

32. Givet: $m = 0,022 \text{ kg}$
 $v(0) = 0$
 luftmotstånd $= 0,01 \cdot v(t)$

a) Sökt: Diff. ekv. som beskriver fallrörelsen

Kraft från luftmotstånd:

$$F = m \cdot a_m = 0,01v \quad (\text{Newtons andra lag})$$

$$\therefore a_m = \frac{0,01v}{m}$$

Total acceleration

$$v' = g - a_m$$

($g = \text{gravitationskonst.}$)

$$v' = 9,82 - \frac{0,01v}{m}$$

$$v' + \frac{0,01}{0,022}v = 9,82$$

$$v' + \frac{10}{22}v = 9,82$$

$$v' + \frac{5}{11}v = 9,82$$

Svar: Fallrörelsen kan beskrivas av

$$v' + \frac{5}{11}v = 9,82$$

b) $v = v_p + v_h$

Ansätt $v_p = a \quad v_p' = 0$

$$0 + \frac{5}{11} \cdot a = 9,82$$

$$a = 21,604$$

Homogena lös.: $v_h = C e^{-5t/11}$

Begynnelsevillk.: $v(0) = 0 \Rightarrow \rightarrow$

$$\begin{aligned} v_p(0) + v_h(0) &= 0 \\ 21,604 + C e^{-5 \cdot 0 / 11} &= 0 \\ C &= -21,604 \end{aligned}$$

SVAR: $v(t) = 21,604 - 21,604 e^{-5t/11}$

$$32c) \quad v(t) = 21,604 - 21,604 \cdot e^{-5/t}$$

$$v(1) \approx 7,89 \text{ m/s}$$

Svar: Hastigheten är ca 7,89 m/s.

33. Vi vet: $A(t)$ = mängden vismut efter t min.
 $B(t)$ = mängden tallium efter t min.

$$\frac{dB}{dt} = 0,32A - 0,15B \quad (1)$$

a) $C(t)$ = mängden bly efter t min.

Sålt: $\frac{dA}{dt}$ och $\frac{dC}{dt}$

Vismut \rightarrow Tallium 0,32/min

Tallium \rightarrow Bly 0,15/min

$$\text{Svar: } \left. \begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= -0,32A \quad (\text{minskning}) \\ \frac{dC}{dt} &= 0,15B \quad (\text{ökning}) \end{aligned} \right\} (2)$$

b) När $B(t)$ har sitt maxvärde är $B'(t) = 0$, vilket enl. (1) ger

$$0,32A - 0,15B = 0$$

vilket enl. (2) ger att Vismut sönderfaller med samma hastighet som Bly bildas (och Talliums sönderfallshastighet är 0).

34. Utgår då ni inte haft tillgång till sådan programvara.

30. Givet: $y(0) = 8^\circ$ $y = \text{mjölktemp.}$
 $y(5) = 12^\circ$ rumstemp. $= 21^\circ$

$$y' = k \cdot (21 - y) \quad (1)$$

Sökt: $y(30) = ?$

$$(1) \Rightarrow y' = 21k - ky$$
$$y' + ky = 21k \quad (2)$$

Partikulärlös.

Ansätt $y_p = a$ $y_p' = 0$ ins. i (2) \Rightarrow

$$0 + ka = 21k$$

$$a = 21$$

Homogen lös.

$$y_h' + ky_h = 0$$

$$y_h = C e^{-kt}$$

Alltså: $y = y_p + y_h = 21 + C e^{-kt}$

Givna villkor ger: $y(0) = 8 \Rightarrow 21 + C e^0 = 8$

$$C = -13$$

$y(5) = 12 \Rightarrow 21 - 13 e^{-k \cdot 5} = 12$

\Downarrow

$$\underline{\underline{k \approx 0,074}}$$

$$y(30) = 21 - 13 e^{-0,074 \cdot 30} \approx 19,6^\circ$$

SVAR: Mjölkens temp. är ca 19,6° efter 0,5h.

$$29b) \quad \frac{dy}{dt} = 100 - 0,1y$$

$$y' + 0,1y = 100 \quad (1)$$

Partikulärlös.

$$y_p = a \quad y_p' = 0 \quad \text{ins. i (1)} \Rightarrow$$

$$0 + 0,1a = 100$$

$$a = 1000$$

Homogen lös.

$$y_h' + 0,1y_h = 0$$

$$y_h = C \cdot e^{-0,1t}$$

$$\text{Alltså: } y = y_p + y_h = 1000 + C e^{-0,1t}$$

Begynnelsevillkor:

$$y(0) = 500 \Rightarrow 1000 + C e^0 = 500$$

$$C = -500$$

$$\therefore y = 1000 - 500 e^{-0,1t}$$

$$28a) 2y' + 3y = 0$$

$$y'(0) = -6$$

$$2y' + 3y = 0$$

$$y' + 1,5y = 0$$

$$y = C e^{-1,5x}$$

$$y' = -1,5 \cdot C e^{-1,5x}$$

$$y'(0) = -6 \Rightarrow$$

$$-1,5 \cdot C e^0 = -6$$

$$C = 4$$

$$\therefore y = 4e^{-1,5x}$$

b) Som ovan men med t.ex. villkoret $y(0) = 2$ istället för $y'(0) = -6$

27. Luftmotstånd $F = m \cdot a_{\text{Lu}} = k \cdot v$ $a_{\text{Lu}} = \frac{k \cdot v}{m}$

Total acceleration: $v' = g - a_{\text{Lu}}$

$$v' = g - \frac{k \cdot v}{m}$$

$$v' + \frac{k}{m} v = g$$

Där k är luftmotståndets proportionalitetskonstant.